Espaces vectoriels

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I. Définitions

Définition. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble, E, muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe $\mathbb{K} \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ telles que*

— $(E, +)$ *est un groupe commutatif*
— $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x,$
— $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall x \in E, \quad (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x),$
— $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall(x, y) \in E^2, \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y,$
— $\forall x \in E, \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x.$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires, ceux de E sont appelés vecteurs.
L'élément neutre de la loi $+$ est appelé vecteur nul.
Étant donné un vecteur x, son inverse pour la loi $+$ est appelé opposé de x et noté $-x$.

Exemple. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ *et* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels pour les lois usuelles.*
$\mathbb{C}$ *est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*
$\mathbb{K}[X]$ *l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition. *(*) Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$. On a alors :*

— $\lambda \cdot 0_E = 0_E,$
— $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E,$
— $(-\lambda) \cdot x = -\lambda \cdot x = \lambda \cdot (-x),$
— $\lambda \cdot x = 0_E \ \Rightarrow\ \lambda = 0_K$ *ou* $x = 0_E$.

II. Deux cas importants

Proposition. *(*) Soient $(E_1, +_1, \cdot_1)$ et $(E_2, +_2, \cdot_2)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*
Alors $E_1 \times E_2$ munies des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$\forall\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) \in \left(E_1 \times E_2\right)^2, \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 +_1 y_1, x_2 +_2 y_2)$$

$$\forall(x_1, x_2)E_1 \times E_2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot_1 x_1, \lambda \cdot_2 x_2)$$

est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé espace vectoriel produit

Exemple. *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel pour l'addition et la multiplication usuelles définie par*

$$\forall\left((a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)\right) \in \left(\mathbb{K}^n\right)^2, \quad (a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n)$$

et de la multiplication externe usuelle $\cdot$ définie par

$$\forall(a_1, ..., a_n)\mathbb{K}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (a_1, ..., a_n) = (\lambda a_1, ..., \lambda a_n)$$

est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

Proposition. *(*) Si E est un $\mathbb{K}$ ev et X une partie quelconque, alors $\mathcal{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$-ev pour les lois usuelles*

Exemple. $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ *l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et, plus généralement, $\mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

III. Sous-espaces vectoriels

Définition. *Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E.*
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est stable par les lois $+$ et $\cdot$ et si F est un espace vectoriel pour les lois induites.

Proposition. *(*) Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
- $0_E \in F$,
- $\forall (x,y) \in F^2, \quad x+y \in F$,
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in F, \quad \lambda \cdot x \in F$.

Remarque : L'hypothèse $0_E \in F$ peut être remplacée par F non vide.

Proposition. *(*) Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
- $0_E \in F$,
- $\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot x + y \in F$.

Exemple. *(*)*
$\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
$\mathcal{C}^n(D,\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}^n(D,\mathbb{K})$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
$\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \text{ paire}\}$ et $\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \text{ impaire}\}$ est un $\mathbb{R}$ espace-vectoriel.
$\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \text{ périodique de période rationnelle}\}$ est un $\mathbb{R}$ espace-vectoriel.
$\{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \text{ s'annulant en } \pi\}$ est un $\mathbb{R}$ espace-vectoriel.
$\{f \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{K}) \,:\, f''' + 5f' - \sqrt{2}f = 0\}$ est un $\mathbb{K}$ espace-vectoriel.
$\{u \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \,:\, \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} + u_n = 0\}$ est un $\mathbb{K}$ espace-vectoriel.

Définition. *Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et x_1, ...,x_r, r vecteurs de E.*
On appelle combinaison linéaire des vecteurs x_1, ...,x_r tout vecteur de la forme

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r.$$

Définition. *Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E. On appelle combinaison linéaire des vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ tout vecteur de la forme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ où la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. On dit que la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ est presque nulle.*
On note $\mathbb{K}^{(I)}$ les suites de scalaires presque nulles. Les combinaisons linéaires des vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ sont donc les vecteurs de la forme $\sum_{k\in I} \lambda_k x_k$ avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$.

Corollaire. *$(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E. Toute combinaison linéaire de vecteurs de E appartient à E.*

Proposition. *Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
- $0_E \in F$,
- *F est stable par combinaison linéaire.*

IV. Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition. *(*) Intersections d'espaces vectoriels*
Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : En particulier, l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. L'union de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 est un sous-espace vectoriel si, et seulement si, $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

Corollaire. *(*) Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E alors il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E au sens de l'inclusion contenant A.*
Il est appelé sous-espace vectoriel de E engendré par A et noté $\mathrm{Vect}(A)$.

Proposition. *Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in E$.*
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{x\})$ est égal à $\{\lambda \cdot x,\ \lambda \in \mathbb{K}\}$. Il est noté $\mathrm{Vect}(x)$ ou $\mathbb{K}x$.

Remarque : Lorsque $x \neq 0_E$, $\mathbb{K}x$ est appelée la droite engendrée par x.

Proposition. *(*) Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et x_1, ...,x_r, r vecteurs de E.*
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{x_1, ..., x_r\}$ est égal à $\left\{\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k,\ (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r\right\}$.
Il est noté $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_r)$.

Exemple. *Si $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $\mathrm{Vect}(2) = \mathbb{R}$.*
Si $E = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\mathrm{Vect}(2) = \mathbb{C}$.
Si $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors $\mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = \{(x, y, 0),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.

Proposition. *(*) Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev et $(x_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E.*
Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\{x_i,\ i \in I\})$ est égal à $\left\{\sum_{k\in I} \lambda_k x_k,\ (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}\right\}$.

Corollaire. *Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaison linéaires des vecteurs de A.*

Exemple. $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}(X^n,\ n \in \mathbb{N})$.

V. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition. *Somme d'espaces vectoriels*
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.
On appelle somme des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 l'ensemble

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2,\ (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\}$$

Remarque : Soient x et y deux vecteurs, on a $\mathbb{K}x + \mathbb{K}y = \mathrm{Vect}(x, y)$.
Plus généralement, étant donnés n vecteurs $(x_1, ..., x_n)$, pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$, on a :

$$\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n) = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_r) + \mathrm{Vect}(x_{r+1}, ..., x_n).$$

Proposition. *(*) La somme de deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sev de E contenant F_1 et F_2.*

Corollaire. *(*) Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ alors*

$$\mathrm{Vect}(A \cup B) = \mathrm{Vect}A + \mathrm{Vect}B$$

En particulier, $\forall (x, y) \in E^2$, $\mathrm{Vect}(x, y) = \mathbb{K}x + \mathbb{K}y$

Corollaire. *Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $F_1 + F_2 = E$ si et seulement si $\forall x \in E,\ \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\ :\ x = x_1 + x_2$ c'est-à-dire si, et seulement si, l'application $F_1 \times F_2 \to E,\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ est surjective*

Définition. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. On dit que les sous-espaces vectoriels* F_1 *et* F_2 *sont en somme directe si*

$$\forall x \in F_1 + F_2,\ \exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\ :\ x = x_1 + x_2$$

c'est-à-dire si si et seulement si l'application $F_1 \times F_2 \to E,\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ *est injective. Dans ce cas,* $F_1 + F_2$ *est noté* $F_1 \bigoplus F_2$*.*

Proposition. *(*) Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. Les sous-espaces vectoriels* F_1 *et* F_2 *sont en somme directe si et seulement si* $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$*.*

Définition. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*.*
On dit que les sous-espaces vectoriels F_1 *et* F_2 *sont supplémentaires s'ils sont en somme directe et si* $F_1 \bigoplus F_2 = E$ *c'est-à-dire si* $\forall x \in E,\ \exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2\ :\ x = x_1 + x_2$ *c'est-à-dire si l'application* $F_1 \times F_2 \to E,\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ *est bijective. c'est-à-dire si tout vecteur de* E *se décompose de façon unique comme la somme d'un vecteur de* F_1 *et d'un vecteur de* F_2*.*

Corollaire. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sous-espaces vectoriels d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *alors* $F_1 \bigoplus F_2 = E$ *si et seulement si l'application*

$$F_1 \times F_2 \to E,\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$$

est bijective