Familles de vecteurs

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I. Familles génératrices

Définition. *Soit $(x_1, ..., x_r) \in E^r$. On dit que la famille $(x_1, ..., x_r)$ est génératrice de E ou qu'elle engendre E lorsque $Vect(x_1, ..., x_r) = E$ i.e. lorsque*

$$\forall x \in E, \quad \exists (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r \ : \ x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$$

Remarque : La famille $(x_1, ..., x_r)$ est génératrice de E si, et seulement si, l'application $\mathbb{K}^r \to E, \ (\lambda_1, ..., \lambda_r) \mapsto \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$ est surjective.

Exercice. *La famille $((1,0,0), (0,1,1), (0,1,1), (1,2,3))$ engendre $\mathbb{R}^3$.*

Exemple. *La famille $\left(X^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$.*

Définition. *Plus généralement, si F est un sev de E et $(x_1, ..., x_r) \in E^r$.*
On dit que la famille $(x_1, ..., x_r)$ engendre F si $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_r) = F$ i.e. si

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \ x_i \in F \quad \text{et} \quad \forall x \in F, \ \exists (\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r \ : \ x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$$

Remarque : La famille $(x_1, ..., x_r) \in E^r$ engendre donc $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_r)$.

Proposition. *Toute sur-famille d'une famille génératrice est elle-même génératrice.*

Proposition. *Si $(x_1, ..., x_{r+1})$ engendre E, alors la famille $(x_1, ..., x_r)$ engendre E si, et seulement si, $x_{r+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_r)$.*

Proposition. *Si $(x_1, ..., x_r)$ engendre E, alors la famille $(y_1, ..., y_s)$ engendre E si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $x_i \in \mathrm{Vect}(y_1, ..., y_s)$.*

Proposition. *Si $(x_1, ..., x_r)$ engendre F_1 un sev de E et si la famille $(y_1, ..., y_s)$ engendre F_2 un sev de E, alors la famille $(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s)$ engendre $F_1 + F_2$.*

II. Familles libres

Définition. *Soit $(x_1, ..., x_r) \in E^r$. On dit que la famille $(x_1, ..., x_r)$ est libre si, et seulement si, l'application $\mathbb{K}^r \to E, \ (\lambda_1, ..., \lambda_r) \mapsto \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$ est injective.*
Si la famille $(x_1, ..., x_r)$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée

Proposition. *La famille* $(x_1, ..., x_r)$ *est libre si*

$$\forall(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$$

La famille $(x_1, ..., x_r)$ *est liée si*

$$\exists(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r \ : \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k = 0 \ et \ \exists i_0 \in [\![1, r]\!] \ : \ \lambda_{i_0} = 0$$

Remarque : Pour montrer qu'une famille $(x_1, ..., x_r)$ est libre, on écrit :
Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k = 0$. Montrons que $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$.

Proposition. *Si* $(x_1, .., x_r)$ *est libre alors la famille* $(x_1, .., x_{r+1})$ *est libre si, et seulement si,* $x_{r+1} \notin \mathrm{Vect}(x_1, .., x_r)$

Exemple. *Une famille d'un vecteur est libre si, et seulement si, ce vecteur est non nul.*
Une famille de deux vecteurs est libre si, et seulement si, ces vecteurs sont non colinéaires.
Une famille de trois vecteurs (u, v, w) *est libre si, et seulement si, la famille* (u, v) *est libre et* $w \notin \mathrm{Vect}(u, v)$.

Proposition. $(x_1, .., x_r)$ *est liée si, et seulement s'il existe* $i_0 \in [\![1, r]\!]$ *tel que* $x_{i_0} \in \mathrm{Vect}(x_i)_{i \in [\![1,r]\!] \setminus \{i_0\}}$.

Proposition. *Toute sous-famille d'une famille libre est encore libre.*

Proposition. *Toute sur-famille d'une famille liée est encore liée.*

Proposition. *Soient* F_1 *et* F_2 *deux sev de* E *en somme directe. Si* $(x_1, ..., x_r)$ *est une famille libre de vecteurs de* F_1 *et si la famille* $(y_1, ..., y_s)$ *est une famille libre de vecteurs de* F_2*, alors la famille* $(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s)$ *est libre.*

Proposition. *Si* $(x_1, ..., x_r)$ *est une famille libre, alors, pour tout* $k \in [\![1, r-1]\!]$*, les sev* $\mathrm{Vect}(x_1, ..., x_k)$ *et* $\mathrm{Vect}(x_{k+1}, ..., x_r)$ *sont en somme directe.*

III. Bases

Définition. *Soit* $(x_1, ..., x_r) \in E^r$*. On dit que la famille* $(x_1, ..., x_r)$ *est une base de* E *si elle est à la fois libre et génératrice de* E.

Remarque : La famille $(x_1, ..., x_r)$ est une base si, et seulement si, l'application

$$\mathbb{K}^r \to E, \ (\lambda_1, ..., \lambda_r) \mapsto \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$$

est bijective.

Proposition. *Soit* $(x_1, ..., x_r) \in E^r$*. La famille* $(x_1, ..., x_r)$ *est une base de* E *si et seulement si*

$$\forall x \in E, \quad \exists!(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r \ : \ x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$$

Pour tout vecteur x*, on appelle coordonnées de* x *dans la base* $(x_1, ..., x_r)$ *l'unique famille de scalaires* $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ *telle que* $x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k x_k$.

Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on note*

$$e_i = (\delta_{k,i})_{k \in [\![1,n]\!]} = (0, ...0, \underbrace{1}_{i\text{-ème position}}, 0...0)$$

La famille $(e_1, ..., e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Proposition. *Si $(x_1, .., x_r)$ est une base de E, alors pour tout $x_{r+1} \in E$, la famille $(x_1, .., x_{r+1})$ est liée.*

Proposition. *Si $(x_1, .., x_{r+1})$ est une base de E, alors $(x_1, .., x_r)$ n'est pas génératrice.*

Proposition. *Soient F_1 et F_2 deux sev de E en somme directe. Si $(x_1, ..., x_r)$ est une base de F_1 et si $(y_1, ..., y_s)$ est une base de F_2, alors la famille $(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s)$ est une base de $F_1 \oplus F_2$.*

Corollaire. *Soient F_1 et F_2 deux sev de E supplémentaires. Si $(x_1, ..., x_r)$ est une base de F_1 et si $(y_1, ..., y_s)$ est une base de F_2, alors la famille $(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_s)$ est une base de E.*

Proposition. *Si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E, alors, pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$, alors les sev $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_r)$ et $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, ..., e_n)$ sont supplémentaires.*

IV. Généralisation

Définition. *Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ engendre E ou qu'elle est génératrice de E lorsque $\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i \in I}\right) = E$ i.e. lorsque*

$$\forall x \in E,\ \exists (\lambda_k)_{k \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}\ :\ x = \sum_{k \in I} \lambda_k x_k$$

Remarque : La famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est génératrice si, et seulement si, l'application

$$\mathbb{K}^{(I)} \to E,\ (\lambda_k)_{k \in I} \mapsto \sum_{k \in I} \lambda_k x_k$$

est surjective.

Définition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On dit que la partie A est génératrice si $\mathrm{Vect} A = E$ i.e. si tout élément de E est une combinaison linéaire de vecteurs de A*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ génératrice alors toute partie de E contenant A est elle-même génératrice.*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ génératrice et $a \in A$. Alors $A \setminus \{a\}$ est encore génératrice de E si, et seulement si, $a \in \mathrm{Vect}\left(A \setminus \{a\}\right)$.*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ génératrice alors $B \in \mathcal{P}(E)$ est génératrice si, et seulement si, $A \subset \mathrm{Vect} B$.*

Définition. *Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est libre si, et seulement si, l'application*

$$\mathbb{K}^{(I)} \to E,\ (\lambda_k)_{k \in I} \mapsto \sum_{k \in I} \lambda_k x_k$$

est injective. Sinon, on dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée.

Proposition. *Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. La famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre si toute ses sous-familles finies sont libres i.e.*

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \quad \sum_{k \in I} \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow (\forall i \in I,\ \lambda_i = 0)$$

Remarque : Les propriétés précédentes se généralisent à des familles quelconques.

Définition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On dit que la partie A est libre si toute sous-famille finie de A est libre. Sinon, on dit que la partie est liée.*

Remarque : Pour montrer qu'une partie A est libre, on écrit :

Soient $(a_1, ..., a_r)$ une famille d'éléments distincts de A et $(\lambda_1, ..., \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k = 0$.

Montrons que $\lambda_1 = ... = \lambda_r = 0$.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ liée alors toute partie de E contenant A est elle-même liée.*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ libre alors toute partie de E incluse dans A est elle-même libre.*

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. La partie A est liée si et seulement si un de ses élément s'écrit comme une combinaison linéaire des autres i.e. si et seulement si*

$$\exists a \in A \ : \ a \in \mathrm{Vect}\,(A \setminus \{a\})$$

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ libre et $x \in E$ alors la partie $A \cup \{x\}$ est libre si et seulement si $x \notin \mathrm{Vect} A$.*

Définition. *Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice de E.*

Remarque : la famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est une base si, et seulement si, l'application

$$\mathbb{K}^{(I)} \to E, \ (\lambda_k)_{k \in I} \mapsto \sum_{k \in I} \lambda_k x_k$$

est bijective.

Proposition. *Soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$. La famille $(x_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si*

$$\forall x \in E, \quad \exists!(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \ : \ x = \sum_{k \in I} \lambda_k x_k$$

Pour tout vecteur x, on appelle coordonnées de x dans la base $(x_i)_{i \in I}$ l'unique famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{k \in I} \lambda_k x_k$.