Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition. *Une partie $\mathcal{F}$ de E est appelée un sea de E s'il existe $a \in E$ et F un sev de E tel que $\mathcal{F} = \{a + f,\ f \in F\}$. On note $\mathcal{F} = a + F$.*

Définition. *On appelle translation de vecteur a l'application $\tau_a : E \mapsto E,\ x \mapsto a + x$*

Remarque : Ainsi, une partie $\mathcal{F}$ de E est appelée un sea de E s'il existe $a \in E$ et F un sev de E tel que $\mathcal{F} = \tau_a(F)$.

Proposition. $\forall (a, b) \in E^2,\ \tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$.
En particulier, pour tout $a \in E$, τ_a est bijective et $(\tau_a)^{-1} = \tau_{-a}$.

Proposition. *Soient $(a, b) \in E^2$ et F_1, F_2 deux sev de E.*
Si $a + F_1 = b + F_2$, alors $F_1 = F_2$ et $b - a \in F_1 = F_2$.
Ainsi, si $\mathcal{F}$ est un sea de E alors il existe un unique sev F dont il soit le translaté.
Ce sev est appelé la direction de $\mathcal{F}$.

Proposition. *Soit $\mathcal{F}$ un sea affine de direction F, alors, pour tout $a \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = a + F$.*
Il n'y a donc pas unicité du vecteur de translation. a est une solution particulière.

Exemple. *Les droites de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ sont des sea. Il s'agit de sev si, et seulement si, elles passent par l'origine.*
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ est une droite affine de direction $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0\}$.

Exemple. *Les plans de $\mathbb{R}^3$ sont des sea. Il s'agit de sev si, et seulement si, ils passent par l'origine.*
Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'ensemble $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$ est un plan affine de direction $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$.

Exemple. *L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est un sea dont la direction est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée.*
Soit a, b et c des fonctions continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
L'ensemble $\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) : af' + bf = c\}$ est un plan affine de direction
$\mathcal{S}_0 = \{f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}) : af' + bf = 0\}$.

Exemple. *Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $\mathcal{S} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c\}$ est un plan affine de direction $\mathcal{S}_0 = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$.*

Proposition. *L'intersection de deux sea de directions respectives F_1 et F_2 est soit vide, soit un sea de direction $F_1 \cap F_2$.*

Proposition. *L'image directe d'un sea de direction F par une application linéaire u est un sea de direction $u(F)$.*
L'image réciproque d'un sea de direction F par une application linéaire u est soit vide, soit un sea de direction $u^{-1}(F)$.

Corollaire. *Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$, alors $u^{-1}(\{y\})$ est vide si $y \notin \mathrm{Im}\, u$ et un sea de direction $\mathrm{Ker}\, u$ sinon.*