

# Dimension finie

Dans ce chapitre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

## I. Existence de bases en dimension finie

**Définition.** On dit qu'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire,  $E$  est dit de dimension infinie.

**Exemple.**  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  et plus généralement  $\mathbb{R}^n$  sont de dimensions finies.  $\mathbb{K}[X]$  et  $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$  ne sont pas de dimensions finies.

**Remarque :** Par convention, le sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $\{0_E\}$ , est de dimension finie et engendré par la famille vide

**Proposition.** *Théorème de la base extraite :* Si  $E$  est de dimension finie, alors de toute famille génératrice finie de  $E$  on peut extraire une base.

**Proposition.** *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base de cardinal fini.*

**Proposition.** *Théorème de la base incomplète :*  
Si  $E$  est de dimension finie, alors toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base.

**Théorème.** Soit  $(g_1, \dots, g_r)$  une famille génératrice de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille libre de  $E$  alors on peut compléter la famille  $(f_1, \dots, f_p)$  avec des vecteurs de  $(g_1, \dots, g_r)$  pour en faire une base.

## II. Dimension

**Théorème.** Si  $E$  est engendré par  $n$  vecteurs, alors :

- toute famille de  $n + 1$  éléments de  $E$  est liée.
- toute famille d'éléments de  $E$  ayant strictement plus de  $n$  éléments est liée.
- toute famille libre d'éléments de  $E$  est de cardinal inférieur ou égal à  $n$ .

**Proposition.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille génératrice de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille libre de  $E$  alors  $p \leq n$ .

**Proposition.** Si  $E$  est de dimension finie alors toutes ses bases sont de même cardinal appelé dimension de  $E$ .

**Définition.** Tout sous-espace vectoriel de dimension un est appelé une droite vectorielle. Tout sous-espace vectoriel de dimension deux est appelé un plan vectoriel.

**Exemple.**  $\mathbb{R}^n$  est de dimension  $n$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est de dimension  $n + 1$ .

**Remarque :** Le corps de base est primordial.

Ainsi,  $\mathbb{C}$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 et un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1. Plus généralement,  $\mathbb{C}^n$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $2n$  et un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

**Proposition.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .  
 Une famille génératrice de  $E$  a au moins  $n$  éléments.  
 Une famille de  $E$  ayant strictement moins de  $n$  éléments n'est pas génératrice.  
 Une famille libre de  $E$  a au plus  $n$  éléments.  
 Une famille de  $E$  ayant strictement plus de  $n$  éléments n'est pas libre.

**Proposition.** Si  $E$  est de dimension finie  $n$  alors :  
 — Toute famille libre à  $n$  éléments est une base de  $E$ .  
 — Toute famille génératrice à  $n$  éléments est une base de  $E$ .

**Proposition.** Si  $E$  et  $F$  sont de dimensions finies, alors  $E \times F$  aussi et

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F.$$

**Corollaire.** Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors pour tout entier  $p$ ,  $E^p$  est de dimension finie égale à  $p \times \dim E$ .

**Proposition.** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels isomorphes.  
 — Si  $E$  est de dimension finie, alors  $F$  aussi et  $\dim E = \dim F$  ;  
 — sinon,  $E$  et  $F$  sont tous les deux de dimensions infinies.

**Remarque :** On a donc montré que si  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels isomorphes, alors ils sont de même dimension (finie ou pas).

**Proposition.** Deux espaces vectoriels de dimension finie sont de même dimension si, et seulement si, ils sont isomorphes.  
 Ainsi, tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

**Proposition.** Si  $E$  et  $F$  sont de dimensions finies, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  aussi et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

### III. Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

Soit  $E$  de dimension finie  $n$ .

**Théorème.** Tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est de dimension finie et  $\dim F \leq n$  avec égalité si, et seulement si,  $F = E$ .

**Proposition.** Tout sous-espace vectoriel de  $E$  admet un supplémentaire.

**Proposition.** Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$  supplémentaires, alors

$$\dim F + \dim G = \dim E.$$

**Remarque :** Il n'y a pas unicité du supplémentaire mais si  $G_1$  et  $G_2$  sont deux supplémentaires d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ , alors  $\dim G_1 = \dim G_2$ . Les sous-espaces vectoriels  $G_1$  et  $G_2$  sont donc isomorphes.

**Corollaire.** Les hyperplans de  $E$  sont exactement les sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension  $n - 1$

**Proposition.** Formule de Grassmann :  
 Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

**Corollaire.** Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors

$$\dim(F_1 + F_2) \leq \dim F_1 + \dim F_2$$

avec égalité si, et seulement si,  $F_1$  et  $F_2$  sont en somme directe.

**Proposition.** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
 — Si  $F$  et  $G$  sont en somme directe et si  $\dim F + \dim G = n$ , alors  $E = F \oplus G$ .  
 — Si  $F + G = E$  et si  $\dim F + \dim G = n$ , alors  $E = F \oplus G$ .

## IV. Dimension et applications linéaires

**Proposition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E$  de dimension finie, alors :

- $Imf$  est de dimension finie ;
- $\dim Imf \leq \dim E$  avec égalité si, et seulement si,  $f$  est injective

**Proposition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $F$  de dimension finie, alors :

- $Imf$  est de dimension finie ;
- $\dim Imf \leq \dim F$  avec égalité si, et seulement si,  $f$  est surjective

**Corollaire.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de même dimension finie. Alors  $f$  est injective si, et seulement si,  $f$  est surjective si, et seulement si,  $f$  est bijective.

**Corollaire.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  avec  $E$  de dimension finie, alors  $f$  est surjective si, et seulement si,  $f$  est injective.

**Proposition.** Soient  $E$  et  $F$  de dimension finie.

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est injective, alors  $\dim E \leq \dim F$ .

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est surjective, alors  $\dim E \geq \dim F$ .

**Proposition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Le sous-espace vectoriel  $f(G)$  est alors de dimension finie et  $\dim f(G) \leq \dim G$ .

## V. Rang

**Définition.** On appelle rang d'une application linéaire la dimension de son image lorsque celle-ci est finie.

**Proposition.** Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $E$  ou  $F$  est de dimension finie, alors  $Imf$  aussi.

Plus précisément :

- si  $E$  est de dimension finie, alors  $rg f \leq \dim E$  avec égalité ssi  $f$  est injective ;
- si  $F$  est de dimension finie, alors  $rg f \leq \dim F$  avec égalité ssi  $f$  est surjective.

**Proposition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  telles que les rangs de  $f$  et de  $g$  soient définis. Alors  $rg(g \circ f) \leq \min(rg f, rg g)$ .

**Proposition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  telles que le rang de  $g$  soit défini et que  $f$  soit surjective. Alors  $rg(g \circ f) = rg g$ .

**Proposition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  telles que le rang de  $f$  soit défini et que  $g$  soit injective. Alors  $rg(g \circ f) = rg f$ .

**Théorème.** Théorème du rang :

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et si  $E$  est de dimension finie, alors  $\dim E = rg f + \dim Kerf$ .

On retrouve les deux résultats suivants :

**Proposition.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E$  et  $F$  de même dimension finie, alors  $f$  est surjective si, et seulement si,  $f$  est injective si, et seulement si,  $f$  est bijective.

**Corollaire.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  avec  $E$  de dimension finie, alors  $f$  est surjective si, et seulement si,  $f$  est injective.

**Exemple.** Soient  $a_1, \dots, a_{n+1}$ ,  $n + 1$  scalaires distincts.

L'application  $\mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$ ,  $P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_{n+1}))$  est bijective.

On retrouve le théorème d'interpolation de Lagrange.

**Définition.** Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

On appelle rang de la famille  $(f_1, \dots, f_p)$  et on note  $rg(f_1, \dots, f_p)$  la dimension de  $\text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$ .

**Proposition.** Soit  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

On a alors  $\text{rg}(f_1, \dots, f_p) \leq p$  avec égalité si, et seulement si,  $(f_1, \dots, f_p)$  est libre.

**Proposition.** Soit  $E$  de dimension finie  $n$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

On a alors  $\text{rg}(f_1, \dots, f_p) \leq n$  avec égalité si, et seulement si,  $(f_1, \dots, f_p)$  engendre  $E$ .

**Proposition.** Soit  $g \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ .

Alors  $\text{rg}(g(f_1), \dots, g(f_p)) \leq \text{rg}(f_1, \dots, f_p)$ .

**Remarque :** Pour qu'il y ait égalité il suffit que  $g$  soit injective.

En fait, il y a égalité si, et seulement si,  $g|_{\text{Vect}(f_1, \dots, f_p)}$  est injective c'est-à-dire si, et seulement si,  $\text{Kerg} \cap \text{Vect}(f_1, \dots, f_p) = \{0\}$ .