Matrices

Dans ce chapitre $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{C}$; n et p sont des entiers non nuls.

I. Définition et structure d'espace vectoriel

Définition. *On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficient dans $\mathbb{K}$, tout élément de $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.*
On la représente sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes.
L'élément à l'intersection de la ième ligne et de la j ème colonne, c'est-à-dire l'image de (i,j) est noté $A_{i,j}$ ou $a_{i,j}$, et appelé coefficient d'indice (i,j).
On utilise une notation indicée plutôt qu'une notation fonctionnelle. Si A est une matrice à n lignes et p colonnes, on écrit :

$$A=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \text{ ou } A=(a_{i,j})_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq p} \text{ ou } A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition. *Si $p=1$, alors on parle de matrice colonne.*
Si $n=1$, alors on parle de matrice ligne.
Si $n=p$, alors on parle de matrice carrée. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est alors noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition. *Soit $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de taille $n\times p$ dont tous les termes sont nuls sauf celui à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1. Ainsi, pour tout $(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2$, on a $(E_{i,j})_{k,\ell}=\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$.*

Proposition. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})=\mathcal{F}([\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\mathbb{K})$ *est un $\mathbb{K}$-ev.*

Proposition. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n\times p$.*
La famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n,1\leq j\leq p}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition. *Une matrice carrée $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonale si*

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i\neq j\Rightarrow a_{i,j}=0.$$

L'ensemble des matrices diagonales de taille n est noté $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$

Proposition. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ *est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. La famille $(E_{i,i})_{1\leq i\leq n}$ en est une base.*

Définition. *Une matrice carrée $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure si*

$$\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i>j\Rightarrow a_{i,j}=0.$$

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n sera noté $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$

Définition. *Une matrice carrée $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire inférieure si*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n sera noté $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$

Définition. *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire supérieure stricte si*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \geq j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n sera noté $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$

Définition. *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite triangulaire inférieure stricte si*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \leq j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n sera noté $\mathcal{T}_n^{--}(\mathbb{K})$

Proposition.
$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n(n+1)/2$. La famille $(E_{i,j})_{1\leq j\leq i\leq n}$ en est une base.
$\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n(n+1)/2$. La famille $(E_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ en est une base.
$\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n(n-1)/2$. La famille $(E_{i,j})_{1\leq j< i\leq n}$ en est une base.
$\mathcal{T}_n^{--}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n(n-1)/2$. La famille $(E_{i,j})_{1\leq i< j\leq n}$ en est une base.

Définition. *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite symétrique si*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}.$$

L'ensemble des matrices symétriques de taille n sera noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$

Théorème. *$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n(n+1)/2$.*
La famille $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1\leq j\leq i\leq n}$ en est une base.

Définition. *Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite antisymétrique si*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = -a_{j,i}.$$

L'ensemble des matrices antisymétriques de taille n sera noté $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

Théorème. *$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n(n-1)/2$.*
La famille $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1\leq j< i\leq n}$ en est une base.

Proposition. *$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Définition. *On appelle transposé d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice ${}^tA \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, $\left({}^tA\right)_{i,j} = a_{j,i}$.*

Proposition. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^t\left({}^tA\right) = A$.*

Proposition. *Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,*
$A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \Leftrightarrow {}^tA \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.
$A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow {}^tA = A$.
$A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow {}^tA = -A$.

Proposition. *L'application $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}),\ A \mapsto {}^tA$ est un isomorphisme.*

Corollaire. *L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \mapsto {}^tA$ est une symétrie vectorielle.*
On retrouve $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

II. Produit matriciel

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On définit la matrice $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ par :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$*

Proposition. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$

Proposition. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est un anneau (non commutatif si $n \geq 2$ et non intègre).*

Proposition. *Formule du binôme de Newton*
Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $AB = BA$ alors pour tout entier r,

$$(A+B)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} A^k B^{r-k}$$

Proposition. *Formule de Bernoulli*
Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $AB = BA$ alors pour tout entier r,

$$A^r - B^r = (A-B)\left(\sum_{k=0}^{r-1} A^k B^{r-1-k}\right)$$

Proposition. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^{+}(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^{-}(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ *et* $\mathcal{T}_n^{--}(\mathbb{K})$ *sont stables par produit.*

Corollaire. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^{+}(\mathbb{K})$ *et* $\mathcal{T}_n^{-}(\mathbb{K})$ *sont des sous-anneaux de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition. *L'ensemble des matrices inversibles de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.*

Proposition. $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ *est un groupe.*

Corollaire. *Soit $(A,B) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})^2$. On a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*

Proposition. *Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$*

Proposition.
L'opération élémentaire $C_i \leftarrow \lambda C_i$ revient à multiplier à droite par $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.
L'opération élémentaire $C_i \leftrightarrow C_j$ revient à multiplier à droite par $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.
L'opération élémentaire $C_i \leftarrow C_i - \lambda C_j$ revient à multiplier à droite par $I_n - \lambda E_{j,i}$.

Proposition.
L'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ revient à multiplier à gauche par $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.
L'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ revient à multiplier à droite par $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$.
L'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ revient à multiplier à droite par $I_n - \lambda E_{i,j}$.

Savoir-faire : Utilisation pour trouver l'inverse d'une matrice.

III. Matrices et applications linéaires

1. Représentation matricielle.

Définition. *Soit $(v_1, ..., v_p) \in E^p$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.*
On définit la matrice de la famille de vecteurs $(v_1, ..., v_p)$ dans une base $\mathcal{B}$ par

$$Mat_{\mathcal{B}}(v_1, ..., v_p) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \text{où} \quad \forall j \in [\![1,p]\!],\ v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

Proposition. *Soit E de dimension finie n de base $\mathcal{B}_E$.*
L'application $E \to \mathcal{M}_{n,1}(K)$, $x \mapsto Mat_{\mathcal{B}_E} x$ est un isomorphisme.

Définition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, ..., f_n)$ une base de F On définit la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ par*

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} f = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \text{où} \quad \forall j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, la j-ème colonne de $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} f$ est $Mat_{\mathcal{B}_F} f(e_j)$.

Proposition. *Soit E et F de bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.*
L'application $\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $f \mapsto Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} f$ est un isomorphisme.

Définition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On définit la matrice de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ par*

$$Mat_{\mathcal{B}} f = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in M_{n,p}(\mathbb{K}) \quad \text{où} \quad \forall j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

2. Propriétés

Proposition. *Coordonnées de l'image d'un vecteur*
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}_E = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, ..., f_n)$ une base de F.
Pour tout $x \in E$, $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} f \ \times\ Mat_{\mathcal{B}_E} x = Mat_{\mathcal{B}_F}(f(x))$

Proposition. *Matrice d'une composée*
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$, $\mathcal{B}_E$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G.
On a :

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(g \circ f) = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G} g \times Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} f$$

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. L'application linéaire f est inversible si, et seulement si, elle est représentée par une matrice inversible.*
Dans ce cas, pour toute base $\mathcal{B}_E$ de E et toute base $\mathcal{B}_F$ de F, on a

$$(Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} f)^{-1} = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}\left(f^{-1}\right).$$

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.*
La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, $Mat_{\mathcal{B}} f$, est diagonale si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ f laisse stable Vect(e_i) si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $f(e_i) = \lambda_i e_i$.

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.*
La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, $Mat_{\mathcal{B}} f$, est triangulaire supérieure si, et seulement si, si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ f laisse stable Vect$(e_1, ..., e_i)$

Proposition. *Une matrice diagonale est inversible si, et seulement si, ses termes diagonaux sont tous non nuls. De plus, si D est une matrice diagonale inversible, alors D^{-1} est diagonale et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\left(D^{-1}\right)_{i,i} = \dfrac{1}{D_{i,i}}$.*

Proposition. *Une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, ses termes diagonaux sont tous non nuls.*
De plus, si T est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) inversible, alors T^{-1} est triangulaire supérieure (resp. inférieure) et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\left(T^{-1}\right)_{i,i} = \dfrac{1}{T_{i,i}}$.

3. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle application linéaire canoniquement associée à A l'unique $f_A \in \mathcal{L}(M_{p,1}(\mathbb{K}), M_{n,1}(\mathbb{K}))$ tel que $Mat_{\mathcal{B}_{c,p},\mathcal{B}_{c,n}} f_A = A$ où $\mathcal{B}_{c,p}$ est la base canonique de $M_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B}_{c,n}$ celle de $M_{n,1}(\mathbb{K})$.*
On a $f_A : M_{p,1}(\mathbb{K}) \to M_{n,1}(\mathbb{K}),\ X \mapsto AX$

Remarque : On identifie souvent $M_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^p$.

Définition. *On appelle noyau de A, le noyau de l'application linéaire canoniquement associée à A. Ainsi*

$$KerA = \{X \in M_{p,1}(\mathbb{K}) \,:\, AX = 0\}$$

Définition. *On appelle image de A, l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A. Ainsi*

$$ImA = \{AX,\ X \in M_{p,1}(\mathbb{K})\} \subset M_{n,1}(\mathbb{K})$$

On appelle rang de A la dimension de son image.

Proposition. *L'image de A est engendrée par ses matrices colonnes.*

Proposition. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.*
Si $B \in Gl_p(\mathbb{K})$, alors $rg(AB) = rg(A)$;
Si $C \in Gl_n(\mathbb{K})$, alors $rg(CA) = rg(A)$;

Corollaire. *Le rang d'une matrice est invariant par les opérations élémentaires suivantes :*
- $C_i \leftrightarrow C_j$
- $C_i \leftarrow \lambda C_i$ *avec* $\lambda \neq 0$
- $C_i \leftarrow C_i - \lambda C_j$ *avec* $j \neq i$
- $L_i \leftrightarrow L_j$
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ *avec* $\lambda \neq 0$
- $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ *avec* $j \neq i$

Savoir-faire : calcul effectif du rang d'une matrice

Proposition. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et f une application linéaire représentée par A, alors :*
- *f est surjective si, et seulement si, $rgA = n$;*
- *f est injective si, et seulement si, $rgA = p$;*
- *f est bijective si, et seulement si, $rgA = n = p$.*

Corollaire. *Une matrice carrée de taille n est inversible si, et seulement si, son noyau est réduit au vecteur nul si, et seulement si, ses colonnes engendrent $M_{n,1}(\mathbb{K})$ si, et seulement si, son rang vaut n.*

Proposition. *Soit A et B deux matrices carrées de taille n telles que $AB = I_n$, alors les matrices A et B sont inversibles et $B = A^{-1}$.*

4. Changement de bases

Définition. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E.*
On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ la matrice

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = Mat_{\mathcal{B}}(e'_1, ..., e'_n) = Mat_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} Id_E$$

Il s'agit donc de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E.*
Alors $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$.

Proposition. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E et $x \in E$.*
Si $X = Mat_{\mathcal{B}} x$ et $X' = Mat_{\mathcal{B}'} x$, alors $X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'$

Théorème. *Théorème de changement de bases.*
Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F. Alors

$$Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F} f = \left(P_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}\right)^{-1} \times Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} f \times P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$$

formule que l'on retiendra sous la forme $M' = Q^{-1}MP$ où

$$M' = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F} f,\ M = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F} f,\ Q = P_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F} \text{ et } P = P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}.$$

Proposition. *Théorème de changement de bases pour les endomorphismes.*
Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, Alors

$$Mat_{\mathcal{B}'} f = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} \times Mat_{\mathcal{B}} f \times P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\ ;$$

formule que l'on retiendra sous la forme $M' = P^{-1}MP$ où

$$M' = Mat_{\mathcal{B}'} f,\ M = Mat_{\mathcal{B}} f \text{ et } P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

IV. Matrices équivalentes. Matrices semblables

1. Matrices équivalentes

Définition. *Soit $(A,B) \in M_{n,p}(\mathbb{K})^2$. On dit que la matrice B est équivalente à la matrice A si, et seulement s'il existe $P \in GL_p$ et $Q \in GL_n$ telles que $B = Q^{-1}AP$.*

Proposition. *La relation $\mathcal{R}$ définie sur $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par $B\mathcal{R}A$ si, et seulement si, B est équivalente à la matrice A est une relation d'équivalence.*

Proposition. *Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles représentent une même application linéaire.*

Théorème. *Soit $M \in M_{n,p}(\mathbb{K})$.*
La matrice M est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$

Proposition. *Deux matrices de même taille sont équivalentes si, et seulement si, elles sont de même rang.*

Proposition. *Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. On a $rg({}^tA) = rgA$*

Corollaire. *Le rang d'une matrice est égal à la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes de la matrice.*

2. Matrices semblables

Définition. *Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2$. On dit que la matrice B est semblable à la matrice A si, et seulement s'il existe $P \in GL_n$ telle que $B = P^{-1}AP$.*

Proposition. *La relation $\mathcal{R}$ définie sur $M_n(\mathbb{K})$ par $B\mathcal{R}A$ si, et seulement si, B est semblable à la matrice A est une relation d'équivalence.*

Proposition. *Deux matrices sont semblables si, et seulement si, elles représentent un même endomorphisme.*

Proposition. *Calcul de puissance*
Si $B = P^{-1}AP$, alors pour tout entier k, on a $B^k = P^{-1}A^kP$

Exercice. *Déterminer les formes linaires ϕ sur $M_n(\mathbb{K})$ telles que*

$$\forall (A,B) \in M_n(\mathbb{K})^2,\ \phi(AB) = \phi(BA).$$

Définition. *On définit la trace d'une matrice carrée comme la somme de ses coefficients diagonaux*

Proposition. *Soit* $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})^2$*, on a* $Tr(AB) = Tr(BA)$

Corollaire. *Deux matrices semblables ont même trace*

Définition. *On peut donc définir la trace d'un endomorphisme comme la trace de n'importe quelle matrice le représentant.*
Ainsi, si $f \in \mathcal{L}(E)$*, et si* $\mathcal{B}$ *est une base de* E*, alors* $Tr\, f = Tr\, Mat_{\mathcal{B}} f$.

Proposition. *Soit* $(f, g) \in \mathcal{L}(E)$*. On a* $Tr(g \circ f) = Tr(f \circ g)$.

Proposition. *La trace d'un projecteur est égale à son rang.*

V. Système linéaires

Soit $A \in M_{n,p(\mathbb{K})}$ et $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. On considère le système $AX = B$ i.e. on recherche les vecteurs $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ tels que $AX = B$.
On peut voir l'ensemble des solution comme l'intersection de n hyperplans affines de $M_{p,1}(\mathbb{K})$

Proposition. *L'ensemble des solutions du système* $AX = B$ *est soit vide soit un sous-espace affine de direction* $KerA$.
Lorsqu'il existe une solution, on dit que le système est compatible.

Proposition. *Le système* $AX = B$ *admet des solutions si, et seulement si,* $B \in ImA$

Corollaire. *Si* $rg(A) = n$*, alors le système* $AX = B$ *admet une solution.*
La réciproque est fausse.

Proposition. *Si le système est compatible, alors il y a unicité de la solution si, et seulement si,* $KerA = \{0\}$ *donc si, et seulement si,* $rgA = p$.
Lorsque le système admet une unique solution, alors le système est dit de Cramer.

Corollaire. *Si* $n = p$*, alors le système* $AX = B$ *est de Cramer si, et seulement si,* $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

VI. Matrices par blocs

1. Matrices par blocs

Proposition. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ *une base de* E.
La matrice de f *dans la base* $\mathcal{B}$ *est de la forme* $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{q,n-q} & C \end{pmatrix}$ *si, et seulement si, le sous-espace vectoriel* $F = Vect(e_1, ..., e_q)$ *est stable par* f.
Dans ce cas, $A = Mat_{(e_1,...,e_q)} f_F$ *où* $f_{|F} : F \to F,\ x \mapsto f(x)$ *est l'endomorphisme induit par* f *sur* F.

Proposition. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ *une base de* E.
La matrice de f *dans la base* $\mathcal{B}$ *est de la forme* $\begin{pmatrix} A & 0_{q,n-q} \\ B & C \end{pmatrix}$ *si, et seulement si, le sous-espace vectoriel* $F = Vect(e_{q+1}, ..., e_n)$ *est stable par* f.
Dans ce cas, $A = Mat_{(e_{q+1},...,e_n)} f_{|F}$

Proposition. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ *une base de* E.
La matrice de f *dans la base* $\mathcal{B}$ *est de la forme* $\begin{pmatrix} 0_{q,n-r} & A \\ B & C \end{pmatrix}$ *si, et seulement si, on a l'inclusion* $f\,(Vect(e_1, ..., e_q)) \subset Vect(e_{r+1}, ..., e_n)$.

2. Matrices extraites

Définition. *Une matrice extraite de A est une matrice obtenue en ne conservant que certaines lignes et certaines colonnes de A.*

Proposition. *Une matrice extraite de A est de rang inférieur ou égal à $rg(A)$.*

Théorème. *Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.*
Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. La matrice A est de rang r si, et seulement si, A admet une matrice carrée extraite de taille r inversible et si aucune matrice carrée extraite de taille $> r$ n'est inversible.

3. Opérations par blocs

Proposition. *Soit $A \in M_{d,r}$, $B \in M_{d,p-r}$, $C \in M_{n-d,r}$, $D \in M_{n-d,p-r}$, $A' \in M_{r,s}$, $B' \in M_{r,q-s}$, $C' \in M_{p-r,s}$ et $D' \in M_{p-r,q-s}$. Alors*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Plus généralement, tous les produits ou combinaisons linéaires par blocs, pour peu qu'ils aient un sens en terme de nombre de lignes et de colonnes, fonctionnent sur le même modèle.