Déterminants

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

I. Formes p-linéaires alternées

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition. *On appelle forme p-linéaire sur E toute application f de E^p dans $\mathbb{K}$ telle que f soit linéaire par rapport à chacune de ses variables i.e. pour tout $k \in [\![1,p]\!]$ et pour toute famille $(v_1,..,v_{k-1},v_{k+1},..,v_p) \in E^{p-1}$, l'application $E \to \mathbb{K},\ v \mapsto f(v_1,..,v_{k-1},v,v_{k+1},..,v_p)$ est linéaire.*
Si $p = 2$ on parle de forme bilinéaire. Si $p = 3$, on parle de forme trilinéaire.

Exemple.
$f\ :\ \mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})^2 \to \mathbb{K},\ (u,v) \mapsto \int_0^1 uv$ *est une forme bilinéaire sur* $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$.
$f\ :\ \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K},\ (x,y) \mapsto xy$ *est une forme bilinéaire sur* $\mathbb{K}$.
$f\ :\ \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K},\ (x,y,z) \mapsto xyz$ *est une forme trilinéaire sur* $\mathbb{K}$.
$f\ :\ (\mathbb{K}^2)^2 \to \mathbb{K},\ ((x,y),(x',y')) \mapsto xy' + x'y + xx'$ *est une forme bilinéaire sur* $\mathbb{K}^2$.

Proposition. *Soit f une forme p-linéaire sur E alors*

$$\forall (v_1,...,v_p) \in E^p,\ \forall (\lambda_1,...,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p, \quad f(\lambda_1 v_1,...,\lambda_p v_p) = \lambda_1 \times ... \times \lambda_p \times f(v_1,...,v_p)$$

$$\forall (v_1,...,v_p) \in E^p,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda v_1,...,\lambda v_p) = \lambda^p f(v_1,...,v_p)$$

Remarque : En particulier, une forme p-linéaire non nulle n'est pas linéaire.

Proposition. *L'ensemble des formes p-linéaires sur E est un $\mathbb{K}$-ev*

Définition. *On dit qu'une forme p-linéaire sur E, f, est alternée lorsque*

$$\forall (v_1,...,v_p) \in E^p,\ \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad (i \neq j \text{ et } v_i = v_j) \Rightarrow f(v_1,...,v_p) = 0$$

Proposition. *Soit f une forme p-linéaire sur E. f est alors alternée si, et seulement si, pour toute transposition τ et pour tout $(v_1,...,v_p) \in E^p$, on a $f(v_{\tau(1)},...,v_{\tau(p)}) = -f(v_1,...,v_p)$*
On dit que f est antisymétrique.

Proposition. *Soit f une forme p-linéaire sur E. f est alors alternée si, et seulement si,*

$$\forall (v_1,...,v_p) \in E^p,\ \forall \sigma \in S_p, \quad f(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1,...,v_p)$$

Proposition. *Soit f une forme p-linéaire alternée sur E. On a alors pour tout $(v_1,...,v_p) \in E^p$, pour tout entier $k \in [\![1,p]\!]$ et pour toute famille de scalaires $(\lambda_1,..,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},..,\lambda_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$:*

$$f(v_1,..,v_{k-1},v_k + \sum_{i \neq k} \lambda_i v_i, v_{k+1},..,v_p) = f(v_1,..,v_{k-1},v_k,v_{k+1},..,v_p)$$

Remarque : C'est en fait une équivalence.

Proposition. *Soit f une forme p-linéaire alternée sur E. Alors, pour tout $(v_1,...,v_p) \in E^p$, si la famille $(v_1,...,v_p)$ est liée, alors $f(v_1,...,v_p) = 0$.*

Remarque : C'est en fait une équivalence.

II. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Théorème. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, alors l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension 1.*

Dans toute la suite E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n

Définition. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.*
On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ et on note $\det_{\mathcal{B}}$, l'unique forme n-linéaire alternée sur E qui à $(e_1, ..., e_n)$ associe 1. Elle est définie par la formule suivante :

$$\det_{\mathcal{B}} \,:\, E^n \to \mathbb{K},\ (v_1, ..., v_n) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \lambda_{k,\sigma(k)} \text{ où } \forall j \in [\![1, n]\!],\ v_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{j,i} e_i$$

Exemple. *Le déterminant dans la base canonique de deux vecteurs (x, y) et (x', y') de $\mathbb{R}^2$ est égal à $xy' - x'y$.*
Le déterminant dans la base $((0, 1), (1, 0))$ de ces mêmes vecteurs est $x'y - xy'$.

Proposition. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E alors*

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(e_1, ..., e_n) \det_{\mathcal{B}}$$

Le scalaire $\det_{\mathcal{B}'}(e_1, ..., e_n)$ est noté $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B}$

Proposition. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E alors*

$$\forall (v_1, ..., v_n) \in E^n, \quad (v_1, ..., v_n) \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(v_1, ..., v_n) \neq 0$$

Définition. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit que deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si $\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} > 0$*

Proposition. *La relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble des bases de E par $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{B}'$ si et seulement si $\mathcal{B}$ = et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation est une relation d'équivalence possédant deux classes d'équivalence.*
Pour orienter E, on choisit une de ces classes d'équivalence. On dit alors que les éléments de cette classe sont les bases directes de E et que les autres sont les bases indirectes de E.

III. Déterminant d'un endomorphisme

Théorème. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique scalaire noté $\det f$ tel que pour toute base $\mathcal{B}$, on a*

$$\forall (v_1, ..., v_n) \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}} \left(f(v_1), ..., f(v_n)\right) = \det f \det_{\mathcal{B}} \left(v_1, ..., v_n\right)$$

Proposition. *Pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, on a $\det f = \det_{\mathcal{B}} \left(f(e_1), ..., f(e_n)\right)$.*

Proposition. *Soient $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors*

$$\det(g \circ f) = \det g \times \det f \quad \text{ et } \quad \det(\lambda f) = \lambda^n \det f$$

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. L'application linéaire f est bijective si et seulement si $\det f \neq 0$.*
Dans ce cas, $\det\left(f^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det f}$.

IV. Déterminant d'une matrice

Définition. *Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de A le scalaire*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{k=1}^{n} a_{\sigma(k),k}$$

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si l'on note C_1,...,C_n les colonnes de A et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $\det A = \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, .., C_n)$.*

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A.*
On a alors $\det A = \det f_A$.

Proposition. *Soit $(v_1, ..., v_n) \in E^n$ et $\mathcal{B}$ une base de E, on a $\det_{\mathcal{B}}(v_1, ..., v_n) = \det\left(Mat_{\mathcal{B}}(v_1, ..., v_n)\right)$.*

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour toute $\mathcal{B}$ de E, on a $\det f = \det\left(Mat_{\mathcal{B}} f\right)$.*

Corollaire. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ représenté par $A \in M_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E tel que $A = Mat_{\mathcal{B}} f$, alors $\det f = \det A$.*

Proposition. *Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$, on a $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$.*

Proposition. *Règle de Sarrus : Si $A \in M_3(\mathbb{K})$, alors*

$$\det A = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}.$$

Proposition. *Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$*

Proposition. *Soient $(A, B) \in M_n(\mathbb{K})$ alors $\det(AB) = \det A \det B = \det(BA)$*

Corollaire. *Deux matrices semblables ont le même déterminant.*

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.*
La matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors $\det\left({}^tA\right) = \det A\cdot$*

Proposition. *L'application $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ A \mapsto \det A$ est linéaire par rapport à chacune des colonnes i.e. pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et pour toute famille $(C_1, .., C_{k-1}, C_{k+1}, .., C_n) \in M_{n,1}(\mathbb{K})^{n-1}$, l'application*

$$M_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ C \mapsto det(C_1, .., C_{k-1}, C, C_{k+1}, .., C_n)$$

est linéaire.

Corollaire. *Opérations élémentaires*
Soit $A = (C_1, ..., C_n) \in M_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ alors
- $\det(C_1, ...C_{i-1}, C_i + \lambda C_j, C_{i-1}, ...C_n) = \det(C_1, ..., C_n)$
- $C_i = C_j \Rightarrow \det(C_1, ..., C_n) = 0$
- $\det(C_1, ..., C_{i-1}, \lambda C_i, C_{i+-1}, ...C_n) = \lambda \det(C_1, ..., C_n)$
- $\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ...C_n) = -\det(C_1, ..., C_n)$
- *pour tout $\sigma \in S_n$, $\det(C_{\sigma(1)}, ...C_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) \det(C_1, ..., C_n)$.*

Comme $\det\left({}^tA\right) = \det A$, on a les mêmes propriétés pour les opérations élémentaires sur les lignes.

V. En pratique

Proposition. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux*

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} & B & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & \alpha \end{pmatrix} \quad ou \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & & B & \end{pmatrix}$$

alors $\det A = \alpha \det B$.

Proposition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} & B & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & & C & \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ & D & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & & E & \end{pmatrix}$$

alors $\det = (-1)^{i+j} a_{i,j} \det \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$.

Définition. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.*
On appelle mineur d'indice (i,j) de la matrice A et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A.

Théorème. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ alors*

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A)$$

On parle de développement par rapport à la j-ème colonne.

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \det A = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}(A)$$

On parle de développement par rapport à la i-ème ligne.

Pour calculer le déterminant d'une matrice, on la simplifie grâce à des opérations élémentaires puis on utilise le développement par rapport à une ligne ou une colonne bien choisie.

Proposition. *Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ de la forme*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,n-r} & C \end{pmatrix}$$

avec $A \in M_r(\mathbb{K})$, $B \in M_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $C \in M_r(\mathbb{K})$ alors $\det M = \det A \det C$.

Corollaire. *Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est égal au produit des déterminants de ses éléments diagonaux*

VI. Résultats sur les déterminants

Théorème. *Si* $A = (C_1, ..., C_n) \in Gl_n(\mathbb{K})$ *et si* $B \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ *alors le système* $AX = B$ *est appelé système de Cramer. Il admet une unique solution donnée par*

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x_k = \frac{\det(C_1, ..., C_{k-1}, B, C_{k+1}, ..., C_n)}{\det A}$$

Définition. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *et* $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
On appelle mineur d'indice (i, j) *de la matrice* A *et on note* $\Delta_{i,j}(A)$ *le déterminant de la matrice carrée de taille* $n - 1$ *obtenue en supprimant la* i*-ème ligne et la* j*-ème colonne de* A.
On appelle cofacteur d'indice (i, j) *de la matrice* A *le scalaire* $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$.

Définition. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$. *On appelle comatrice de* A *la matrice des cofateurs de* A *i.e.* $Com(A) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)\right)_{1\leq i,j,\leq n}$

Proposition. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{K})$ *alors* $A\,{}^tComA = {}^tComAA = \det AI_n$.
Ainsi, si $A \in Gl_n(\mathbb{K})$ *alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^tComA$$

Remarque : En pratique, cette formule n'est utilisée que pour $n = 2$.

Corollaire. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{K})$ *alors* $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Théorème. *Déterminant de Vandermonde.*
Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ *alors*

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_j & \cdots & x_n \\ x_1^2 & \cdots & x_j^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_j^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (x_j - x_i)$$