Intégration

I. Cas des fonctions en escalier

1. Subdivision

Définition. *On appelle subdivision d'un segment $[a,b]$ la donnée d'un nombre fini de points de $[a,b]$, $x_0,..x_n$ tels que $x_0 = a < x_1 < .. < x_{n-1} < x_n = b$. On la note $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.*
On appelle pas de la subdivision $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$, le réel strictement positif

$$\delta(\sigma) = \max_{k\in[\![0,n-1]\!]}(x_{k+1} - x_k)$$

Définition. *On dit que la subdivision $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une subdivision régulière de $[a,b]$ ou qu'elle est de pas constant si*

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$$

Définition. *Étant données deux subdivisions $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $\sigma' = (x'_k)_{k\in[\![0,n']\!]}$ de $[a,b]$. On dit que la subdivision σ' est plus fine que la subdivision σ si*

$$\{x_k,\ k \in [\![0,n]\!]\} \subset \{x'_k,\ k \in [\![0,n']\!]\}$$

Définition. *Étant données deux subdivisions $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $\sigma' = (x'_k)_{k\in[\![0,n']\!]}$ de $[a,b]$. On note $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision de $[a,b]$ constituée des points de σ et de σ' rangés dans l'ordre croissant et sans répétitions.*
En particulier, la subdivision $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que les subdivisions σ et σ'.

2. Intégrale d'une fonction en escalier

Définition. *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{C})$ est en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, $k \in [\![0,n-1]\!]$. On dit alors que la subdivision σ est adaptée à f.*
On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escaliers sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition. $(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),+,\times)$ *est un sous-anneau de* $(\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K}),+,\times)$

Proposition. $(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),+,.)$ *est un sous-espace vectoriel de* $(\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K}),+,.)$

Définition. *Soit* $f\in\mathcal{F}([a,b],\mathbb{C})$ *et* $\sigma=(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ *une subdivision adaptée à* f. *On note*

$$I(f,\sigma)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)$$

Proposition. *Soit* $f\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$.
Si σ *et* σ' *sont des subdivisions adaptées à* f *alors* $I(f,\sigma)=I(f,\sigma')$.
La valeur commune est appelée intégrale de f *sur* $[a,b]$ *et notée* $\int_a^b f$ *ou* $\int_a^b f(x)dx$

3. Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition. *Relation de Chasles*
Soit $f\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$ *et* $c\in]a,b[$ *alors* $f_{|[a,c]}\in\mathcal{E}([a,c],\mathbb{C})$, $f_{|[c,b]}\in\mathcal{E}([c,b],\mathbb{C})$ *et*

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

Proposition. *Linéarité*
Soit $(f,g)\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})^2$ *alors pour tout couple de complexes* (λ,μ),

$$\int_a^b \lambda f+\mu g=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g$$

i.e.

$$I\,:\,\mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})\to\mathbb{C},\ f\mapsto\int_a^b f$$

est une forme linéaire.

Proposition. *Positivité*
Soit $f\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ *positive sur* $[a,b]$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points alors son intégrale sur* $[a,b]$ *est positive.*
De plus, son intégrale est nulle si et seulement si f *est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points*

Corolaire. *Croissance*
Soit $(f,g)\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})^2$ *tel que* $f\leq g$ *sur* $[a,b]$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points alors*

$$\int_a^b f\leq\int_a^b g$$

avec égalité si et seulement si f *et* g *coïncident sur* $[a,b]$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

Corolaire. *Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ alors $|f| \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

avec égalité si et seulement si f est de signe constant sur $[a,b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Corolaire. *Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $m \leq f \leq M$ sur $[a,b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

Proposition. *Invariance par translation*
Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$ et $c \in \mathbb{R}$ alors $f_c : [a+c, b+c] \to \mathbb{C},\ x \mapsto f(x-c)$ est en escalier sur $[a+c, b+c]$ et

$$\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} f_c$$

II. Cas des fonctions continues par morceaux

1. Fonctions continues par morceaux

Définition. *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{C})$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ telle que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ soit prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$. On dit alors que la subdivision σ est adaptée à f.*
On note $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition. *Une fonction $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{C})$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ telle que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ soit continue et admette une limite finie à droite en x_i et une limite finie à gauche en x_{i+1}.*

Proposition. *Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.*

Proposition. $(\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K}), +, \times)$ *est un sous-anneau de* $(\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K}), +, \times)$

Proposition. $(\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{K}), +, .)$ *est un sous-espace vectoriel de* $(\mathcal{F}([a,b],\mathbb{K}), +, .)$

Théorème. *Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.*

Rq : une fonction continue par morceaux sur un segment n'atteint pas forcément ses bornes.

2. Approximation des fonctions continues par morceaux

Définition. *On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ est uniformément continue sur $[a, b]$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \,:\, \forall (x, y) \in D^2,\ |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Proposition. *Une fonction uniformément continue est continue*

Proposition. *Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.*

Théorème. *Théorème de Heine :*
Une fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Théorème. *Densité des fonctions en escalier sur $[a, b]$.*
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$ alors il existe $\phi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$ telle que

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon$$

3. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{R})$. On définit les ensembles non vides*

$$\mathcal{E}^-(f) = \{\psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \,:\, \psi \leq f\} \quad \textit{et} \quad \mathcal{E}^+(f) = \{\psi \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}) \,:\, f \leq \psi\}$$

et on a l'égalité

$$\sup \left\{ \int_a^b \psi,\ \psi \in \mathcal{E}^-(f) \right\} = \inf \left\{ \int_a^b \psi,\ \psi \in \mathcal{E}^+(f) \right\}.$$

Si f est en escalier sur $[a, b]$, alors cette valeur commune est égale à $\int_a^b f$.
Cette valeur commune est donc appelée intégrale de f et encore notée $\int_a^b f$.

Définition. *Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C})$ alors Ref et Imf sont continues par morceaux sur $[a, b]$. On définit l'intégrale de f sur $[a, b]$ par*

$$\int_a^b f = \int_a^b Ref + i \int_a^b Imf$$

Proposition. *Relation de Chasles Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C})$ et $c \in]a, b[$ alors $f_{|[a,c]} \in \mathcal{C}_{pm}([a, c], \mathbb{C})$, $f_{|[c,b]} \in \mathcal{C}_{pm}([c, b], \mathbb{C})$ et*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Proposition. *Linéarité*
Soit $(f,g) \in \mathcal{C}_{pm}\left([a,b],\mathbb{C}\right)^2$ *alors pour tout couple de complexes* (λ,μ)*,*

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

i.e.

$$I\ :\ \mathcal{C}_{pm}\left([a,b],\mathbb{C}\right) \to \mathbb{C},\ f \mapsto \int_a^b f$$

est une forme linéaire.

Proposition. *Positivité*
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ *positive sur* $[a,b]$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points alors son intégrale sur* $[a,b]$ *est positive.*

Proposition. *Croissance*
Soit $(f,g) \in \mathcal{C}_{pm}\left([a,b],\mathbb{C}\right)^2$ *tel que* $f \leq g$ *sur* $[a,b]$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points alors*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Proposition. *Soit* $(f,g) \in \mathcal{C}_{pm}\left([a,b],\mathbb{C}\right)^2$ *tel que* $f = g$ *sauf en un nombre fini de points alors*

$$\int_a^b f = \int_a^b g$$

Théorème. *Positivité Soit* $f \in \mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ *positive sur* $[a,b]$ *alors son intégrale sur* $[a,b]$ *est nulle si et seulement si* f *est nulle sur* $[a,b]$*.*

Proposition. *Croissance*
Soit $(f,g) \in \mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{C}\right)^2$ *tel que* $f \leq g$ *sur* $[a,b]$ *alors*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

avec égalité si et seulement si $f = g$ *sur* $[a,b]$*.*

Proposition. *Soit* $f \in \mathcal{C}_{pm}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$ *positive sur* $[a,b]$ *alors son intégrale sur* $[a,b]$ *est nulle si et seulement si* f *est nulle sur* $[a,b]$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

Corolaire. *Soit* $(f,g) \in \mathcal{C}_{pm}\left([a,b],\mathbb{C}\right)^2$ *tel que* $f \leq g$ *sur* $[a,b]$ *alors leurs intégrales sur* $[a,b]$ *sont égales si et seulement si* $f = g$ *sur* $[a,b]$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

Corolaire. *Soit* $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ *alors* $|f| \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ *et*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

avec égalité si et seulement si f *est de signe constant sur* $[a,b]$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points.*

Corolaire. *Soit* $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *alors* $|f| \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *et*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

avec égalité si et seulement si f *est de signe constant sur* $[a,b]$.

Corolaire. *Soit* $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ *telle que* $m \leq f \leq M$ *sur* $[a,b]$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

Définition. *Soit* $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$.
On appelle valeur moyenne de f *sur* $[a,b]$ *le complexe* $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f$.

Proposition. *Soit* $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ *alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(c).$$

Proposition. *Invariance par translation*
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{C})$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *alors* $f_c : [a+c, b+c] \to \mathbb{C},\ x \mapsto f(x-c)$ *est continue par morceaux sur* $[a+c,b+c]$ *et*

$$\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} f_c$$

III. Sommes de Riemann

1. Définition et limite

Théorème. *Soit* $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{C})$.
Soit $\sigma = (x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ *une subdivision de* $[a,b]$ *et* $\sigma' = (y_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ *une famille de réels telle que pour tout* $k \in [\![0,n-1]\!]$, $y_k \in [x_k, x_{k+1}]$, *on appelle somme de Riemann associé le complexe*

$$S(f,\sigma,\sigma') = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(y_k)$$

Si f est continue sur $[a,b]$ alors la valeur de la somme de Riemann tend vers l'intégrale de f sur $[a,b]$ quand le pas de la subdivision σ tend vers zéro i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0\ :\ \delta(\sigma) < \eta \Rightarrow \left| S(f,\sigma,\sigma') - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon$$

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{C}\left([a,b],\mathbb{C}\right)$ alors*

— *Méthodes des rectangles à gauche*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$$

— *Méthodes des rectangles à droite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$$

— *Méthodes du point milieu*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (k+1/2)\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f$$

— *Méthodes des trapèzes*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)}{2} = \int_a^b f$$

2. Vitesse de convergence

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{C}^1\left([a,b],\mathbb{C}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]} = \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ alors*

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|$$

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{x\in[a,b]} \left|f'(x)\right|$$

On dit que les méthodes des rectangles à droite ou à gauche est d'ordre un car l'erreur est un $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{C}^2\left([a,b],\mathbb{C}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]} = \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ alors*

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} \left|f''(x)\right|$$

On dit que la méthode des trapèzes est d'ordre deux car l'erreur est un $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

IV. Intégration et dérivation

Définition. *Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$. On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée est égale à f.*

Proposition. *Si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ admet deux primitives alors elles sont égales à une constante additive près.*

Théorème. *Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ et $a \in I$ alors la fonction*

$$F : I \to \mathbb{C},\ x \mapsto \int_a^x f$$

est dérivable sur I et de dérivée f.

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ et $a \in I$ alors l'ensemble des primitives de f est*

$$\{I \to \mathbb{C},\ x \mapsto C + \int_a^x f,\ C \in \mathbb{C}\}$$

Corolaire. *Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ et $a \in I$ alors $I \to \mathbb{C},\ x \mapsto \int_a^x f$ est la primitive de f s'annulant en a.*

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$, F une primitive de f et $(a, b) \in I^2$ alors*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

La quantité $F(b) - F(a)$ est notée $[F]_a^b$.

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ et $a \in I$ alors*

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \int_a^x f'$$

Proposition. *Intégration par parties Soit $(u, v) \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})^2$ alors*

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Proposition. *Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$, $(u, v) \in \mathcal{C}^1(J, I)^2$ alors la fonction*

$$\phi : J \to \mathbb{C},\ x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f$$

est dérivable sur I de dérivée

$$\phi' : J \to \mathbb{C},\ x \mapsto v'(x) f(v(x)) - u'(x) f(u(x))$$

Théorème. *Soit* $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$*,* $\phi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ *et* $(a,b) \in J^2$ *alors*

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(u))\phi'(u)du$$

Proposition. *Soit* $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$*,* $(a,b) \in I^2$ *et* $\phi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ *bijective alors*

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad \int_a^b f(x)dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(a)} f(\phi(u))\phi'(u)du$$

Rq : En pratique pour montrer que ϕ est bijective, il suffit de montrer que ϕ' ne s'annule pas sur J sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Corolaire. *Translation*
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], \mathbb{C})$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *alors*

$$\int_a^b f = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$

Corolaire. *Transformation affine*
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$ *et* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ *alors*

$$\int_a^b f = \int_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f\left(\frac{u-\beta}{\alpha}\right) du$$

Corolaire. *Parité*
Soit $f \in \mathcal{C}([-b,b], \mathbb{C})$ *paire alors*

$$\int_{-b}^b f = 2\int_0^b f$$

Corolaire. *Imparité*
Soit $f \in \mathcal{C}([-b,b], \mathbb{C})$ *impaire alors*

$$\int_{-b}^b f = 0$$

Corolaire. *Périodicité*
Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ T*-périodique alors*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f = \int_0^T f$$