Probabilités

I. Expérience aléatoire et univers

L'objectif est de décrire une expérience aléatoire i.e. un phénomène dont le résultat n'est pas sûr.

Exemple. *lancer de dés, pile ou face...*

Même si le résultat de l'expérience n'est pas certain, on connait les résultats possibles. L'ensemble de ces résultats est appelé ensemble des possibles ou univers et noté Ω.

Exemple. $\Omega = \{1, \cdots, 6\}$, $\Omega = \{P, F\}$.

On peut s'intéresser non pas uniquement au résultat mais à certaines de ces propriétés.

Exemple. *Résultat pair.*

Définition. *On appelle évènement toute partie Ω i.e. tout élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.*

Définition. *L'évènement $\emptyset$ est appelé l'évènement impossible.*
L'évènement Ω est appelé l'évènement certain.

Définition. *Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$.*
L'évènement $\overline{A}$ est appelé évènement contraire de A.
L'évènement $A \cup B$ est appelé évènement A ou B ou réunion des évènements A et B.
L'évènement $A \cap B$ est appelé évènement A et B ou conjonction des évènements A et B.
Si $A \cap B = \emptyset$, les évènements A et B sont dits incompatibles.
L'inclusion $A \subset B$ se lit "A implique B".

Définition. *On dit que des évènement $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment un système complet d'évènements si*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

c'est-à-dire s'il s'agit d'une partition de Ω. On note $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i$.

Proposition. *Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'évènements, pour toute partie A de Ω, on a*

$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A)$$

II. Espaces probabilisés finis

On se limitera à un univers Ω fini.

Définition. *Une probabilité sur Ω est une application P de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$ vérifiant :*
- $P(\Omega) = 1$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2, \quad A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$.

Définition. *Si P est une probabilité sur Ω, alors le couple (Ω, P) est appelé espace probabilisé fini.*

Proposition. *Soit P une probabilité sur Ω. On a*
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- $P(\emptyset) = 0$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $\forall (A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ *incompatibles*, $P\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Proposition. *Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'évènements, pour toute partie A de Ω, on a*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A)$$

Proposition. *Caractérisation d'une probabilité par l'image des singletons.*
Une probabilité P sur Ω est entièrement déterminé par les réels $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$. En effet

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$$

Réciproquement, si les réels positifs $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ vérifient $\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega = 1$, alors

$$P\ :\ \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1],\ A \mapsto \sum_{\omega\in A} p_\omega$$

est une probabilité sur Ω.

Exemple. *Si on choisit $\left(p_\omega = \dfrac{1}{\#\Omega}\right)_{\omega\in\Omega}$, on définit la probabilité uniforme.*
On dit qu'il y a équiprobabilité. Dans ce cas, $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$.

III. Probabilités conditionnelles

Dans la suite (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

Définition. *Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tel que $P(B) \neq 0$.*
On appelle probabilité de A sachant B le réel $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Proposition. *Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $P(B) \neq 0$. L'application $P_B\ :\ \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1],\ A \mapsto P(A|B)$ est une probabilité sur Ω appelée probabilité conditionnelle sachant B.*

Proposition. *Formule des probabilités composées :*
Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ tel que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$, on a

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P\left(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) = P(A_1) \times \prod_{k=2}^{n} P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right)$$

Proposition. *Formule des probabilités totales :*
Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'évènements de probabilités non nulles.
Pour tout évènement A, on a

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(A|A_i).$$

Proposition. *Formules de Bayes :*
Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ *tel que* $P(A)P(B) \neq 0$*, alors* $P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}P(B|A)$.

Corollaire. *Soit* $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ *un système complet d'évènements de probabilités non nulles, pour tout évènement* B *tel que* $P(B) \neq 0$*, on a*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P\left(B|A_i\right)}.$$

IV. Indépendance

Définition. *Deux évènements* A *et* B *sont dits indépendants si*

$$P(A \cap B) = P(A)(B).$$

Proposition. *Soit* $(A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ *tel que* $P(B) \neq 0$*, alors les évènements* A *et* B *sont indépendants si, et seulement si,* $P(A|B) = P(A)$.

Proposition. *Soit* $(A,B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ *si les évènements* A *et* B *sont indépendants, alors :*
- *les évènements* $\overline{A}$ *et* B *sont indépendants ;*
- *les évènements* A *et* $\overline{B}$ *sont indépendants ;*
- *les évènements* $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *sont indépendants.*

Définition. *Les évènements* $(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ *sont dits indépendants deux à deux si*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)(A_j)$$

Proposition. *Toute sous-famille d'une famille d'évènements indépendants deux à deux est une famille d'évènements indépendants deux à deux.*

Définition. *Les évènements* $(A_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{P}(\Omega)^n$ *sont dits mutuellement indépendants deux à deux si pour toute sous-famille* $(A_{i_k})_{1\leq k\leq p}$,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{p} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{p} P(A_{i_k})$$

Proposition. *L'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux mais il n'y a pas de réciproque.*

Proposition. *Toute sous-famille d'une famille d'évènements mutuellement indépendants est une famille d'évènements mutuellement indépendants.*

Exemple. *Si on lance deux dés les évènements A="le premier résultat est pair", B="le deuxième résultat est pair" et C="la somme des résultats est paire" sont indépendants deux à deux mais pas mutuellement.*