Convexité

Dans tout ce chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point.

I. Fonctions convexes

1. Définitions

Définition. *Une partie D de $\mathbb{R}$ est dite convexe lorsque :*

$$\forall (x,y) \in D^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad (1-\lambda)\,x + \lambda\,y \in D.$$

Proposition. *Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Définition. *f est dite convexe sur I lorsque :*

$$\forall (x,y) \in D^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big((1-\lambda)\,x + \lambda\,y\big) \leq (1-\lambda)\,f(x) + \lambda\,f(y).$$

Définition. *f est dite concave sur I lorsque :*

$$\forall (x,y) \in D^2, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f\big((1-\lambda)\,x + \lambda\,y\big) \geq (1-\lambda)\,f(x) + \lambda\,f(y).$$

Proposition. *f est concave sur I si, et seulement si, $-f$ est convexe sur I.*

Exemple. *Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes.*

Proposition. *La somme de deux fonctions convexes sur un intervalle I est convexe.*

2. Interprétation géométrique : position par rapport aux cordes, par rapport aux sécantes

Définition. *On appelle corde toute portion de droite reliant deux points du graphe de f, c'est-à-dire tout ensemble de la forme $\{((1-\lambda)\,x + \lambda\,y, (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y))\,,\ \lambda \in [0,1]\}$ avec $(x,y) \in I^2$.*

Remarque : Soit $(x,y) \in I^2$ et A, B les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.
L'ensemble $\{\big((1-\lambda)\,x + \lambda\,y, (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)\big)\,,\ \lambda \in [0,1]\}$ est noté $[A,B]$. Il est appelé la corde reliant les points A et B.

Proposition. *f est convexe si, et seulement si, son graphe est située au dessus de ses cordes, c'est-à-dire si, et seulement si, pour tout $(x,y) \in I^2$ avec $x < y$, le graphe de $f_{|[x,y]}$ est au-dessus de la corde $[A,B]$ où A, B sont les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$.*

Exemple. *La fonction $x \mapsto x^3$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ mais ne l'est pas sur $\mathbb{R}$.*

Proposition. *Soit f est convexe et $(x,y) \in I^2$ tel que $x < y$. Si l'on note A, B les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$, alors :*

- *le graphe de $f_{|I \cap]-\infty, x]}$ est situé au-dessus de la droite (AB).*
- *le graphe de $f_{|[x,y]}$ est situé en dessous de $[AB]$;*

— *le graphe de* $f_{|I\cap[y,+\infty,[}$ *est situé au-dessus de la droite* (AB).

Proposition. *Inégalité de Jensen*
Si f *est convexe sur* I , *on a l'inégalité :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, f(x_i).$$

quels que soient les réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ *de somme 1 et quels que soient les éléments* $x_1,\dots,x_n$ *de* I.

Remarque : Il s'agit d'une équivalence.

Remarque : Le réel $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ est appelé barycentre des points $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ pondérés par les poids $(\lambda_i)_{1\leq i\leq p}$. Il correspond à une moyenne pondérée. En particulier, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ est appelé l'isobarycentre.

Exemple. *Pour tout* $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, *on a :* $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\leq n\sum_{i=1}^{n}x_i^2$, *inégalité que l'on peut retrouver avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

II. Régularité des fonctions convexes

1. Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes

Proposition. f *est convexe sur* I *si, et seulement si, pour tout* a *dans* I *la fonction taux d'accroissement en* a, $\tau_a\,:\,I\setminus\{a\},\ x\mapsto\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ *est croissante.*

Proposition. *Inégalité des pentes. Soit* f *est convexe et* $(x,y,z)\in I^3$ *tel que* $x<y<z$. *On a les inégalités suivantes :*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Remarque : Il s'agit d'une équivalence.