

Familles sommables

Dans tout ce chapitre, I et J sont deux ensembles quelconques.

I. Familles sommables de nombres réels positifs

1. Définitions et lien avec les séries

Proposition. Toute partie A de $\overline{\mathbb{R}}$ non vide possède une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.
On la note $\text{Sup } A$.

Remarque : Soit A une partie de $\overline{\mathbb{R}}$ non vide. La borne supérieure de A est infinie si, et seulement si, A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\text{Sup } A = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A : M < a$$

Exemple. Si u est une suite croissante alors, d'après le théorème de la limite monotone, sa limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ est la borne supérieure de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. On la note $\text{Sup } u$.

Exemple. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs

- Si $\sum u_n$ convergente, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \text{Sup} \left\{ \sum_{k=0}^n u_k, n \in \mathbb{N} \right\}$.
- Si $\sum u_n$ est divergente, alors, par convention, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \infty$.
- Ainsi, dans tous les cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \text{Sup} \left\{ \sum_{k=0}^n u_k, n \in \mathbb{N} \right\}$.

On va généraliser cette idée.

Définition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. On définit sa somme comme la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ des sommes $\sum_{i \in F} u_i$ quand F décrit l'ensemble des parties finies de I .

On la note $\sum_{i \in I} u_i$. Ainsi,

$$\sum_{i \in I} u_i = \text{Sup} \left\{ \sum_{i \in F} u_i, F \text{ partie finie de } I \right\}.$$

On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable lorsque $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Proposition. Toute sous-famille d'une famille de réels positifs sommable est encore sommable.

Proposition. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

La suite u est donc sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.

2. Comparaison, combinaison linéaire permutation

Proposition. Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs telles que $\forall i \in I, u_i \leq v_i$. On a

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$$

Ainsi,

- si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ aussi ;
- si la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, alors la famille $(v_i)_{i \in I}$ non plus.

Proposition. Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs et λ un réel positif. On a

$$\sum_{i \in I} (u_i + v_i) = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} (\lambda u_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i.$$

Remarque : Il s'agit d'égalités dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$.

Corollaire. Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs.

- La famille $(u_i + v_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, les familles $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ le sont.
- Si λ est un réel strictement positif, alors la famille $(\lambda u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(u_i)_{i \in I}$ l'est.

Exemple. Soit $\ell_2(I) = \{u \in \mathbb{C}^I : \sum_{i \in I} |u_i|^2 < +\infty\}$.

Si $(u, v) \in \ell_2(I)^2$, alors $uv \in \ell_1(I)$, on en déduit que $\ell_2(I)$ est un $\mathbb{C}$ -espace-vectoriel.

Proposition. Soit σ une bijection d'un ensemble J dans I et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. On a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} u_{\sigma(j)}$$

Remarque : On dit que l'on fait le changement d'indice $i = \sigma(j)$.
L'égalité est dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Corollaire. Soit σ une bijection d'un ensemble J dans I et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(u_{\sigma(j)})_{j \in J}$ est sommable.

Corollaire. Soit σ une permutation de I et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. On a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

Ainsi, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable.

Remarque : On dit qu'il y a invariance de la somme par permutation.

Exemple. Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ et $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.

3. Sommation par paquets

Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I \cup J}$ une famille de réels positifs. Si I et J sont disjoints, alors on a

$$\sum_{i \in I \cup J} u_i = \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in J} u_i.$$

Ainsi, la famille $(u_i)_{i \in I \cup J}$ est sommable si, et seulement si, les familles $(u_i)_{i \in I}$ et $(u_i)_{i \in J}$ le sont.

Remarque :

- L'hypothèse "disjoint" est nécessaire pour avoir l'égalité des sommes mais, même si I et J ne sont pas disjoints, on conserve le fait que la famille $(u_i)_{i \in I \cup J}$ est sommable si, et seulement si, les familles $(u_i)_{i \in I}$ et $(u_i)_{i \in J}$ le sont.
- Le résultat se généralise à une union finie d'ensembles.

Exemple. Calculer $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une famille de réels positifs. La famille $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{-n}$ convergent et dans ce cas

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$$

Pour étendre la proposition précédente à une union quelconque, on a besoin d'étendre la notion de somme à une famille d'éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. Si l'un des éléments de cette famille vaut $+\infty$, on dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable et on note $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

Théorème. Si I est l'union disjointe des I_j avec $j \in J$, alors pour toute famille $(u_i)_{i \in I}$ de réels positifs, on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

Ainsi la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, pour tout $j \in J$, la famille $(u_i)_{i \in I_j}$ est sommable et si la famille des $\left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J}$ est sommable.

Exemple. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La famille $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Théorème. de Fubini. Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de réels positifs. On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$$

Ainsi, il y a équivalence entre :

- la famille $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable ;
- pour tout $i \in I$, la famille $(u_{i,j})_{j \in J}$ est sommable et la famille $\left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right)_{i \in I}$ est sommable ;
- pour tout $j \in J$, la famille $(u_{i,j})_{i \in I}$ est sommable et la famille $\left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)_{j \in J}$ est sommable.

Corollaire. Soit $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de réels positifs. On a

$$\sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$$

Ainsi, il y a équivalence entre :

- la suite double $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum u_{n,p}$ converge et la série de terme général $\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$ converge ;

— pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\Sigma u_{n,p}$ converge et la série de terme général $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$ converge.

Corollaire. Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs. On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \sum_{i \in I} u_i \sum_{j \in J} v_j.$$

Remarque : On peut généraliser ce résultat à un produit fini de familles de réels positifs.

Exemple. Soit $r \in [0, 1[$. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{1 - r^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^{2n-1}}{1 - r^{2n-1}}$

Proposition. Soient Σu_n et Σv_n deux séries à termes positifs. Pour tout entier n , on pose $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$. On a alors

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \right)$$

Définition. La série de terme général w_n est appelée produit de Cauchy des séries Σu_n et Σv_n .

Exemple. La fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ vérifie $\forall (t, s) \in (\mathbb{R}^+)^2, f(t+s) = f(t)f(s)$.

II. Familles sommables de nombres complexes

1. Somme d'une famille sommable

Définition. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes est dite sommable lorsque la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable.

On note alors $u \in \ell_1(I)$.

Remarque : On en déduit directement que toute sous-famille d'une famille sommable est sommable et qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, elle est le terme général d'une série absolument convergente.

Définition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels sommable. On appelle somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ le réel $\sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$. On la note $\sum_{i \in I} u_i$.

Proposition. Si une famille de complexes $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors les familles $(\operatorname{Re} u_i)_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im} u_i)_{i \in I}$ le sont aussi.

Définition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes sommable. On appelle somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$ le complexe $\sum_{i \in I} \operatorname{Re} u_i + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im} u_i$. On la note $\sum_{i \in I} u_i$.

Proposition. Soit u une suite complexe. La famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série Σu_n est absolument convergente et, dans ce cas, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

2. Comparaison, combinaison linéaire permutation

Proposition. Soient $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes et $(v_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs telles que $\forall i \in I, |u_i| \leq v_i$.

Si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la famille $(u_i)_{i \in I}$ aussi.

Proposition. Soit σ une bijection d'un ensemble J dans I et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes. La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(u_{\sigma(j)})_{j \in J}$ est sommable et, **dans ce cas**, on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} u_{\sigma(j)}$$

Corollaire. Soit σ une permutation de I et $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes. La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable et, **dans ce cas**, on a On a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes **sommable**. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F de I telle que, pour toute partie J de I contenant F , on ait :

$$\left| \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in J} u_i \right| \leq \varepsilon.$$

Proposition. Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de nombres complexes **sommables** et λ un complexe. On a

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$$

Proposition. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes **sommable**. On a l'inégalité triangulaire suivante : $\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$.

3. Sommation par paquets

Théorème. Si I est l'union disjointe des I_j avec $j \in J$, alors pour toute famille $(u_i)_{i \in I}$ de nombres complexes **sommable**, on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

Théorème. de Fubini Soit $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de complexes **sommable**. On a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$$

Exemple. Soit z un complexe tel que $|z| < 1$. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$.

Exemple. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{1-z^{2n-1}}$

Corollaire. Soit $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de complexes **sommable**. On a

$$\sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} u_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p} \right)$$

Corollaire. Soient $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de complexes **sommables**. La famille $(u_i v_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est alors sommable et l'on a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_i v_j = \sum_{i \in I} u_i \sum_{j \in J} v_j.$$

Remarque : On peut généraliser ce résultat à un produit fini de familles sommables.

Exemple. Soit $I = \{2^p 3^q, (p, q) \in \mathbb{N}^2\}$ et $J = \{3^p 5^q, (p, q) \in \mathbb{N}^2\}$. Les familles $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in I}$ et $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \in J}$ sont sommables de sommes respectives 0 et $-\frac{15}{8}$.

Proposition. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Leur produit de Cauchy est absolument convergent et l'on a

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n\right)$$

Exemple. La fonction $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exemple. Soit a et b deux réels strictement plus grand que 1. Justifier que la famille $\left(\frac{(-1)^{p+q}}{a^p b^q (p+q+1)}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et déterminer sa somme.