

Fonctions de deux variables

I. Fonctions continues sur un ouvert de \mathbb{R}^2

1. Ouverts de \mathbb{R}^2

On munit \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne canonique $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$. On appelle boule ouverte de rayon R l'ensemble

$$B((x_0, y_0), R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < R\}.$$

Définition. On appelle ouvert de \mathbb{R}^2 toute partie U de \mathbb{R}^2 telle que :

$$\forall (x, y) \in U, \exists R > 0 : B((x, y), R) \subset U.$$

Proposition. Toute boule ouverte de \mathbb{R}^2 est un ouvert de \mathbb{R}^2

Exemple.

- Si I sont deux intervalles ouverts de \mathbb{R} , alors $I \times J$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $R > 0$. L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| > R\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 tandis que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq R\}$ n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^2
- L'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 tandis que l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y\}$ n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^2

Dans toute la suite U désigne un ouvert de \mathbb{R}^2 et I un intervalle de \mathbb{R} non trivial.

2. Fonctions continues

Définition. Soit f une fonction de U dans \mathbb{R} et $(x_0, y_0) \in U$.

On dit que f est continue en (x_0, y_0) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall (x, y) \in U, \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \eta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon.$$

On note $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur U à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition. Soit f une fonction de U dans \mathbb{R} . On dit que f est continue (sur U) lorsque f est continue en chaque point de U .

Exemple. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f : I \mapsto \mathbb{R}, x_0 \in I$ et $g : I \times \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x)$. Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, la fonction g est continue en (x_0, y_0) si, et seulement si, f est continue en x_0 .

Proposition. L'ensemble $\mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire et par produit. C'est donc un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de l'ensemble des fonctions de U dans \mathbb{R}

Proposition. Si f est une fonction continue sur U et qui ne s'annule pas sur U , alors la fonction $1/f$ est définie et continue sur U .

Corollaire. *Le quotient de deux fonctions continues sur U dont le dénominateur ne s'annule pas est continu sur U .*

Proposition. *Soit f définie sur U à valeurs dans \mathbb{R} et g définie sur I à valeurs dans \mathbb{R} telles que $\forall (x, y) \in U, f(x, y) \in I$.*

Si f est continue en (x_0, y_0) et si g est continue en $f(x_0, y_0)$, alors $g \circ f$ est continue en (x_0, y_0) .

Corollaire. *Si $f \in \mathcal{C}^0(U)$, si $g \in \mathcal{C}^0(I)$ et si $f(U) \subset I$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(U)$.*

Proposition. *Soit x et y deux fonctions définies sur I à valeurs dans \mathbb{R} et f définie sur U telles que $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in U$.*

Si x et y sont continues en $t_0 \in I$ et si f est continue en $(x(t_0), y(t_0))$, alors $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est continue en t_0 .

Corollaire. *Soit x et y deux fonctions continues sur I à valeurs dans \mathbb{R} et f continue sur U telles que $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in U$. La fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est alors continue sur I .*

Proposition. *Soit x et y deux fonctions définies sur un ouvert V de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} et f définie sur U telles que $\forall (a, b) \in V, (x(a, b), y(a, b)) \in U$.*

Si x et y sont continues en $(a_0, b_0) \in V$ et si f est continue en $(x(a_0, b_0), y(a_0, b_0))$, alors la fonction $(a, b) \mapsto f(x(a, b), y(a, b))$ est continue en (a_0, b_0) .

Corollaire. *Soit x et y deux fonctions continues sur un ouvert V de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} et f continues sur U telles que $\forall (a, b) \in V, (x(a, b), y(a, b)) \in U$. La fonction $(a, b) \mapsto f(x(a, b), y(a, b))$ est alors continue sur V .*

II. Dérivées partielles

1. Définition

Définition. *Soit f définie sur U à valeurs dans \mathbb{R} et $(x_0, y_0) \in U$.*

On dit que f possède une première dérivée partielle (ou une dérivée partielle par rapport à sa première variable) en (x_0, y_0) si la fonction $f_1 : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en x_0 . Dans ce cas,

la dérivée $f'_1(x_0)$ est notée $\frac{\partial f}{\partial x} f(x_0, y_0)$ ou $\partial_1 f(x_0, y_0)$ ou $\partial_x f(x_0, y_0)$.

On dit que f possède une seconde dérivée partielle (ou une dérivée partielle par rapport à sa seconde variable) en (x_0, y_0) si la fonction $f_2 : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en y_0 . Dans ce cas, la

dérivée $f'_2(x_0)$ est notée $\frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0)$ ou $\partial_2 f(x_0, y_0)$ ou $\partial_y f(x_0, y_0)$.

Remarque : Comme U est un ouvert de \mathbb{R}^2 , pour tout $(x_0, y_0) \in U$, il existe $R > 0$ tel que $B((x_0, y_0), R) \subset U$. Les fonctions $f_1 : x \mapsto f(x, y_0)$ et $f_2 : x \mapsto f(x_0, y)$ sont donc correctement définies respectivement sur les intervalles $]x_0 - R, x_0 + R[$ et $]y_0 - R, y_0 + R[$.

Remarque : Dans l'expression $\partial_x f(x, y)$ les deux x n'ont rien à voir.

Exemple. *Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f : I \mapsto \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $g : I \times \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x)$. Pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, la fonction g admet une dérivée partielle par rapport à y qui est nulle et une dérivée partielle par rapport à x en (x_0, y_0) si, et seulement si, f est dérivable en x_0 .*

Exemple. *Étudier l'existence des dérivées partielles de $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|$.*

2. Opérations

Proposition. *Soit f et g définies sur U à valeurs dans \mathbb{R} et $(x, y) \in U$. Si f et g possèdent une i -ème dérivée partielle en (x, y) , alors $f + g$ et fg aussi et l'on a :*

$$\partial_i(f + g)(x, y) = \partial_i f(x, y) + \partial_i g(x, y) \quad \text{et} \quad \partial_i(fg)(x, y) = \partial_i f(x, y) g(x, y) + f(x, y) \partial_i g(x, y)$$

Proposition. Soit f définie sur U à valeurs dans \mathbb{R} et $(x, y) \in U$. Si f possède une i -ème dérivée partielle en (x, y) et si $f(x, y) \neq 0$, alors $1/f$ aussi et l'on a :

$$\partial_i \left(\frac{1}{f} \right) (x, y) = \frac{-\partial_i f(x, y)}{(f(x, y))^2}$$

Exemple. Déterminer les dérivées partielles de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} (x, y) \mapsto \frac{x}{x^2 + y^4}$.

Remarque : L'existence de dérivées partielles n'assure pas la continuité comme le montre l'exemple de la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple. Étudier la continuité et l'existence de dérivées partielles de

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition. Soit f définie sur U à valeurs dans \mathbb{R} et g définie sur I à valeurs dans \mathbb{R} telles que $\forall (x, y) \in U, f(x, y) \in I$.

Si f possède une i -ème dérivée partielle en $(x_0, y_0) \in U$ et si g est dérivable en $f(x_0, y_0)$, alors $g \circ f$ possède une i -ème dérivée partielle en (x_0, y_0) et :

$$\partial_i (g \circ f) (x_0, y_0) = \partial_i f (x_0, y_0) \times (g' \circ f) (x_0, y_0)$$

III. Fonctions de classes \mathcal{C}^1

1. Définitions et premières propriétés

Définition. Soit f définie sur U à valeurs dans \mathbb{R} . On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur U lorsque f possède des dérivées partielles en tout point de U et lorsque les dérivées partielles $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues sur U .

On note $\mathcal{C}^1(U)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Proposition. L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de U dans \mathbb{R}

2. Développement limité à l'ordre 1

Théorème. Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur U . Pour tout $(x_0, y_0) \in U$, on a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)h + \partial_2 f(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|)$$

Remarque : Sous ces conditions, on approxime donc localement f par la fonction affine

$$(x, y) \mapsto f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Le plan d'équation $z = f(x_0, y_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0)$ est appelé le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0) .

Proposition. Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , alors f est continue sur U .

Proposition. L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est par produit. C'est donc un sous-anneau de l'ensemble des fonctions de U dans \mathbb{R}

Proposition. Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U à valeurs dans \mathbb{R} et qui ne s'annule pas sur U , alors la fonction $1/f$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U

Corollaire. Le quotient de deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur U dont le dénominateur ne s'annule pas est de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Corollaire. Si $f \in \mathcal{C}^1(U)$, si $g \in \mathcal{C}^1(I)$ et si $f(U) \subset I$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^1(U)$.

Proposition. Règle de la chaîne

Soit x et y deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I à valeurs dans \mathbb{R} et f de classe \mathcal{C}^1 sur U telles que $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in U$. La fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est alors de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$, on a :

$$g'(t) = x'(t) \partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t) \partial_2 f(x(t), y(t))$$

ce que l'on écrit aussi :

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \partial_1 f(x(t), y(t)) x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t)) y'(t)$$

Corollaire. Soit x et y deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert V de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} et f de classe \mathcal{C}^1 sur U telles que $\forall (a, b) \in V, (x(a, b), y(a, b)) \in U$.

La fonction $g : (a, b) \mapsto f(x(a, b), y(a, b))$ est alors de classe \mathcal{C}^1 sur V et pour tout $(a, b) \in V$ on a :

$$\partial_i g(a, b) = \partial_1 f(x(a, b), y(a, b)) \partial_i x(a, b) + \partial_2 f(x(a, b), y(a, b)) \partial_i y(a, b)$$

Corollaire. Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur U , $p = (x_0, y_0) \in U$ et $v = (v_x, v_y) \in \mathbb{R}^2$.

La fonction $g : t \mapsto f(p + tv)$ est dérivable en 0 et $g'(0) = \partial_x f(x_0, y_0) v_x + \partial_y f(x_0, y_0) v_y$

Le réel $g'(0)$ est noté $D_v f(p)$ et appelée dérivée de f au point p selon le vecteur v .

Remarque : $\partial_x f(x_0, y_0) = D_{(1,0)} f(x_0, y_0)$ et $\partial_y f(x_0, y_0) = D_{(0,1)} f(x_0, y_0)$

Exemple. Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Déterminer les dérivées partielles de $(r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ en fonction de celles de f .

Exemple. Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Déterminer les dérivées partielles de $(x, y) \mapsto f(x + y, xy)$ en fonction de celles de f .

Exemple. Soit $f = (f_1, f_2)$ avec f_1 et f_2 de classe \mathcal{C}^1 sur U . Étudier l'existence des dérivées partielles de $(x, y) \mapsto \|f(x, y)\|$.

3. Gradient

Définition. Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur U . Pour tout $(x, y) \in U$, on appelle gradient de f au point (x, y) , le vecteur de \mathbb{R}^2 : $\nabla f(x, y) = (\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y))$

Proposition. Soient f et g de classe \mathcal{C}^1 sur U à valeurs dans \mathbb{R} . On a

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad \nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

Proposition. Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur U à valeurs dans \mathbb{R} et qui ne s'annule pas sur U , alors

$$\nabla \left(\frac{1}{f} \right) = \frac{-1}{f^2} \nabla f$$

Remarque : Soit f de classe \mathcal{C}^1 sur U .

- Pour tout $(x_0, y_0) \in U$, on a :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle + o(\|(h, k)\|)$$

- Pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $D_v f(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), v \rangle$
- En particulier, on a $|D_v f(x_0, y_0)| \leq \|\nabla f(x_0, y_0)\| \|v\|$ donc si v est unitaire $D_v f(x_0, y_0)$ est maximal lorsque v est positivement colinéaire à $\nabla f(x_0, y_0)$. Ainsi, le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

- Soit x et y deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I à valeurs dans \mathbb{R} et f de classe \mathcal{C}^1 sur U telles que $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in U$. En posant $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ et $\gamma' : t \mapsto (x'(t), y'(t))$, pour tout $t \in I$, on a :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

- En particulier, si γ est une ligne de niveau, c'est-à-dire si $f \circ \gamma$ est constante, alors $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$. On dit que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

IV. Extrema

Définition. Soit D une partie quelconque de \mathbb{R}^2 et $(x_0, y_0) \in D$.

- On dit que f possède un minimum en (x_0, y_0) lorsque $\forall (x, y) \in D, f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.
- On dit que f possède un minimum local en (x_0, y_0) lorsque

$$\exists r > 0, \forall (x, y) \in D, f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$

- On dit que f possède un maximum en (x_0, y_0) lorsque $\forall (x, y) \in D, f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$.
- On dit que f possède un maximum local en (x_0, y_0) lorsque

$$\exists r > 0, \forall (x, y) \in D, f(x_0, y_0) \geq f(x, y).$$

Proposition. Tout extremum local d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2 est un point critique, c'est-à-dire un point où le gradient est nulle.

Remarque : Les hypothèses du théorème ne sont pas optimales

Remarque : Il n'y a pas de réciproque.

Exemple. Pour la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3$, $(0, 0)$ est un point critique mais f ne possède pas d'extremum local en l'origine.

Exemple. Étudier les extrema de $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 3(x^2 + y^2)$.